

Transformadores multiseccionales de cuarto de onda.

La teoría de reflexiones pequeñas descrita en la sección anterior se puede usar para analizar transformadores multiseccionales de un cuarto de onda. Considere la distribución del transformador de N secciones como la de la figura 5.

El coeficiente de reflexión parcial ρ_n entre las secciones n y $(n + 1)$ se puede escribir como

$$\rho_n = \frac{Z_{n+1} - Z_n}{Z_{n+1} + Z_n} \quad (20)$$

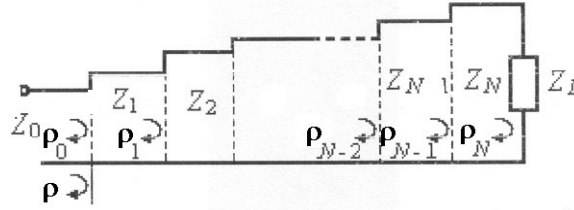


Figura 5
Transformador de N secciones.

La última (la enésima) coeficiente de reflexión es

$$\rho_N = \frac{Z_L - Z_N}{Z_L + Z_N}$$

donde Z_L es la impedancia de la carga. Todas las secciones tienen igual longitud eléctrica $\beta l = \theta$ que es $\pi/2$ (longitud de un cuarto de onda) en la frecuencia central f_0 . La carga se supone puramente resistiva y puede ser mayor o menor que Z_0 . En este análisis, se supondrá mayor, de manera que $\rho_n = |\rho_n|$. Si fuera menor, todos los ρ_n serían números reales negativos y la única modificación que se requiere para efectuar el análisis es sustituir ρ_n por $-\rho_n$.

Con la aproximación que se presentó en la sección anterior, el coeficiente de reflexión total se obtiene como la suma de las ondas reflejadas de primer orden, dada por

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 e^{-j2\theta} + \rho_2 e^{-j4\theta} + \dots + \rho_N e^{-j2N\theta} \quad (21)$$

donde, por medio de los factores $e^{-j2n\theta}$, se toman en consideración el retardo en fase que introducen las diferentes distancias que deben recorrer las diferentes ondas parcialmente reflejadas.

Ahora es oportuno suponer que el transformador es simétrico; es decir, $\rho_0 = \rho_N$, $\rho_1 = \rho_{N-1}$, $\rho_2 = \rho_{N-2}$...etc., y por lo tanto la ecuación (21) se hace

$$\rho = e^{-jN\theta} \left\{ \rho_0 [e^{jN\theta} + e^{-jN\theta}] + \rho_1 [e^{j(N-2)\theta} + e^{-j(N-2)\theta}] + \dots \right\} \quad (22)$$

donde el último término es $\rho_{(N-1)/2} (e^{j\theta} + e^{-j\theta})$ cuando N es impar y $\rho_{N/2}$ cuando N es

par. Se ve así que, para el transformador simétrico, el coeficiente de reflexión ρ está dado por la serie de Fourier en cosenos

$$\rho = 2 e^{-jN\theta} \{ \rho_0 \cos N\theta + \rho_1 \cos(N-2)\theta + \dots + \rho_n \cos(N-2n)\theta + \dots \} \quad (23)$$

En esta expresión, el último término es $\rho_{(N-1)/2} \cos\theta$ cuando N es impar y $1/2\rho_{N/2}$ cuando N es par. Es obvio ahora que mediante la selección adecuada de los coeficientes ρ_n de reflexión parcial, se puede obtener una gran variedad de características de banda de paso. Las impedancias Z_n para las diferentes secciones se calculan a partir de los ρ_n . Como la serie es de cosenos, la función periódica que se define es periódica en el intervalo π correspondiente al cambio de frecuencia por la cual la longitud eléctrica de cada sección de transformador cambia en una media longitud de onda. En la siguiente sección se presenta las especificaciones de los coeficientes ρ_n para obtener características de banda de paso de máxima respuesta plana.

Transformador de respuesta máxima plana.

La característica de banda de paso con máxima respuesta plana se obtiene si ρ y sus $(N-1)$ derivadas respecto a la frecuencia (o a θ) se anulan para la frecuencia central f_0 (donde $\theta = \pi/2$). Tal característica se obtiene si se escoge

$$\rho = A [1 + e^{-j\theta}]^N \quad (24)$$

en cuyo caso

$$|\rho| = |A 2^N (\cos\theta)^N| \quad (24b)$$

Cuando $\theta = 0$, se tiene

$$|\rho| = A 2^N = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

y
$$A = 2^{-N} \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad (25)$$

Entonces

$$\begin{aligned} A &= 2^{-N} \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} (1 + e^{-j2\theta})^N \\ &= 2^{-N} \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \sum_{n=0}^N C_n^N e^{-j2n\theta} \end{aligned} \quad (26)$$

donde los coeficientes binomiales están dadas por

$$C_n^N = \frac{N(N-1)(N-2)\dots(N-n+1)}{n!} = \frac{N!}{(N-n)!n!} \quad (27)$$

De la aproximación con reflexiones pequeñas, se tiene

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 e^{-j2\theta} + \rho_2 e^{-j4\theta} + \rho_3 e^{-j6\theta} + \dots + \rho_N e^{-j2N\theta} \quad (28)$$

Al comparar la ecuación (26) con la ecuación (28) y observando que

$$C_n^N = C_{N-n}^N, C_0^N = 1, C_1^N = N = C_{N-1}^N, \text{ etc,}$$

se ve que debemos escoger

$$\rho_n = 2^{-N} \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} C_n^N = \rho_{N-n} \quad (29)$$

Para obtener la solución sencilla para las impedancias características Z_n , es conveniente hacer aproximaciones ulteriores. Como ya se ha considerado que todos los ρ_n son pequeños, se puede escribir

$$\ln \frac{Z_{n+1}}{Z_n} \approx 2 \frac{Z_{N+1} - Z_n}{Z_{N+1} + Z_n} = 2 \rho_n \quad (30)$$

Además, usando la aproximación

$$\ln \frac{Z_L}{Z_0} = 2 \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} + \frac{2}{3} \left(\frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \right)^3 + \dots \approx 2 \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad (31)$$

Se tiene así la siguiente relación

$$\ln \frac{Z_{n+1}}{Z_n} = 2 \rho_n = 2^{-N} C_n^N \ln \frac{Z_L}{Z_0} \quad (32)$$

Se obtiene así la solución para el logaritmo de las impedancias. Dado que estos valores son proporcionales a los coeficientes lineales, al transformador se le denomina binomial. Como la teoría anterior es aproximada, el rango de Z_L se limita a $0.5Z_0 < Z_L < 2Z_0$ aproximadamente, para obtener resultados exactos.

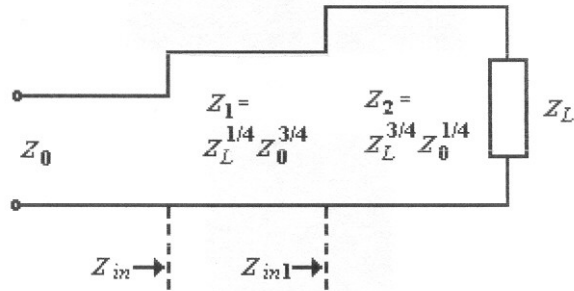


Figura 6
Transformador de dos secciones.

Como ejemplo, considere el transformador de dos secciones de la figura 6. De la ecuación (32) se obtiene

$$\ln \frac{Z_1}{Z_0} = \frac{1}{4} \ln \frac{Z_L}{Z_0} \text{ es decir } Z_1 = Z_L^{1/4} Z_0^{3/4} \quad (33)$$

y

$$\ln \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{1}{2} \ln \frac{Z_L}{Z_0} \text{ es decir } Z_2 = Z_L^{3/4} Z_0^{1/4} \quad (34)$$

puesto que $C_0^2=1$ y $C_1^2=2$. Aunque se ha utilizado la teoría aproximada, resulta que los valores antes mencionados para Z_1 y Z_2 para el caso especial de un transformador de dos secciones son las soluciones exactas y no aproximadas, un resultado que da una indicación de la precisión de la teoría aproximada. Puede verse fácilmente que los valores anteriores de Z_1 y Z_2 conducen al acoplamiento perfecto en la frecuencia central f_0 .

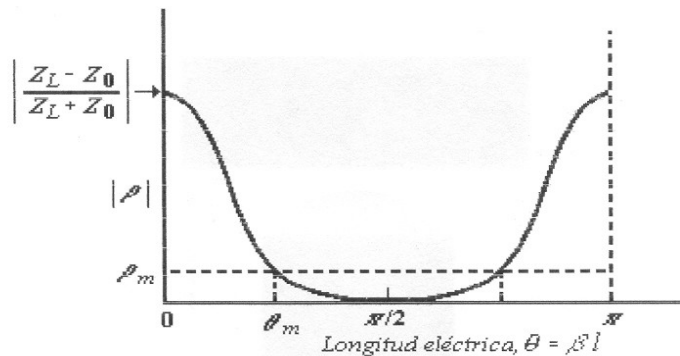


Figura 7
Banda de paso de un transformador de respuesta máxima plana.

En la figura 7 se muestra la característica de banda de paso que se obtiene en un transformador de respuesta máxima plana. Sea ρ_m el valor máxima de ρ que se puede tolerar en la banda de paso. El ángulo θ_m que resulta en $\rho = \rho_m$ se obtiene de la ecuación (24) y se puede escribir

$$\theta_m = \cos^{-1} \left| \frac{2\rho_m}{\ln(Z_L/Z_0)} \right|^{1/N} \quad (35)$$

como obtenido de la ecuación (24b). En el caso de secciones de líneas de transmisión TEM, $\theta = \pi f/2f_0$, y de aquí que el ancho de banda fraccional está dado por

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{2(f_0 - f_m)}{f_0} = 2 - \frac{4}{\pi} \cos^{-1} \left| \frac{2\rho_m}{\ln(Z_L/Z_0)} \right|^{1/N} \quad (36)$$

Observe que la solución a la función coseno inverso se escoge de tal manera que θ_m sea menor que $\pi/2$. De la expresión anterior se deduce que el transformador multiseccional de respuesta plana máxima puede otorgar un ancho de banda mucho más amplia y útil que un transformador de una sola sección. Como un ejemplo, para $\rho_m = 0.2$, el ancho de banda fraccional que se obtiene para el transformador de una sola sección (la ecuación (10)), diseñado para acoplar una carga de 18Ω a una línea de 50Ω , es 0.5, mientras que el ancho de banda fraccional correspondiente (la ecuación (36)) es de 0.861.